

Chapitre 6

Rappels et compléments sur les fonctions réelles

Plan du chapitre

1	Généralités sur les fonctions réelles	2
1.1	Définir une fonction réelle	2
1.2	Égalités et inégalités sur $\mathbb{R}^D$	3
1.3	Périodicité, parité	4
1.4	Opérations algébriques sur $\mathbb{R}^D$	6
1.5	Sens de variation	7
1.6	Fonctions majorées, minorées, bornées	8
1.7	Maximum, minimum	10
1.8	Restriction d'une fonction	11
2	Notions intuitives de continuité et de dérivation	12
2.1	Limites	12
2.2	Continuité	12
2.3	Dérivation, fonction dérivée	14
2.4	Opérations sur les fonctions dérivables	15
2.5	Dérivée et tangente à $\mathcal{C}_f$	17
2.6	Dérivée et sens de variation	18
2.7	Étude de fonction	18
3	Compléments	20
3.1	Asymptotes	20
3.2	Fonction à valeurs complexes	20
3.3	Transformations et symétries du graphe	21
4	Méthodes pour les exercices	22

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, D et D' sont supposés être des sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$. Sauf mention contraire, les fonctions sont supposées *réelles de la variable réelle* (càd définies sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Dans certaines sections on considérera aussi des fonctions *complexes de la variable réelle* (càd définies sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$).



Problématique. Pour résoudre un problème d'analyse (équation, inéquation, calcul de maximum, ...), il est parfois utile d'analyser une expression / une fonction. Pour cela, on peut étudier :

- Les valeurs pour lesquelles cette expression est définie...
- Le sens de variation, les limites, la périodicité, la parité...
- Plus généralement le graphe de la fonction, qui peut s'avérer précieux dans l'analyse.

1 Généralités sur les fonctions réelles

1.1 Définir une fonction réelle

Une fonction peut être définie de deux façons :

- On précise l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée et l'expression de $f(x)$:

$$\begin{array}{ll} f : D \rightarrow \mathbb{R} & g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) & x \mapsto x^2 \end{array}$$

Dans ce cas, $f(x)$ n'a un sens que si $x \in D$.

- On ne précise que l'expression de $f(x)$:

$$f : x \mapsto f(x) \qquad g : x \mapsto \sqrt{x+3}$$

Dans ce cas, l'ensemble de départ de f est sous-entendu : il s'agit de l'ensemble des réels x pour lesquels l'expression $f(x)$ a un sens. On l'appelle l'ensemble de définition de f et on le note D_f . Par exemple, la fonction g est définie sur l'ensemble suivant :

$$D_g = \dots\dots$$

Remarque. Dans toutes les écritures ci-dessus, la lettre x est une **variable muette**. Il en va de même, lorsqu'on écrit :

”Soit f la fonction définie par $f(x) = \dots$ ”

Notation. On note $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^D$ l'ensemble des fonctions définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 6.1

On définit la fonction composée de g et f comme étant la fonction

$$g \circ f : x \mapsto g(f(x))$$

L'ensemble de définition de $g \circ f$ est donné par :

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

Cela signifie que $g(f(x))$ a un sens si et seulement si $\begin{cases} f(x) \text{ a un sens} \\ f(x) \in D_g \end{cases}$. Plus généralement, pour deux fonctions $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D' \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction $g \circ f$ est définie sur D si et seulement si : $\forall x \in D \quad f(x) \in D'$.

6.2



Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x+1}}$.

Solution.

1.2 Égalités et inégalités sur $\mathbb{R}^D$

Définition 6.3 – Égalités et inégalités (fonctions)

Soit $f, g \in \mathbb{R}^D$.

- On écrira $f = g$ si : $\forall x \in D \quad f(x) = g(x)$
- On écrira $f \leq g$ si : $\forall x \in D \quad f(x) \leq g(x)$

Méthode

Pour montrer une inégalité du type $f(x) \leq g(x)$, on peut étudier la fonction $x \mapsto g(x) - f(x)$ et montrer qu'elle est positive par un tableau de variations.

6.4



Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x \geq 1 + x$

Solution.

Définition 6.5

Soit $f \in \mathbb{R}^D$.

1. f est dite positive si elle est minorée par 0. On notera cela $f \geq 0$.
2. f est dite négative si elle est majorée par 0. On notera cela $f \leq 0$.
3. f est dite strictement positive, et on notera $f > 0$, si $\forall x \in D \quad f(x) > 0$.
4. f est dite strictement négative, et on notera $f < 0$, si $\forall x \in D \quad f(x) < 0$.



La négation de “ $f \leq 0$ ” **n’est pas** “ $f > 0$ ” !

$$\text{non}(f \leq 0) \iff \dots\dots\dots$$

Définition 6.6

Soit $f \in \mathbb{R}^D$.

- f est dite identiquement nulle, et on notera $f \equiv 0$, si f est égale (en tout point de D) à la fonction nulle, donc si :

$$\forall x \in D \quad f(x) = 0$$

- Dans le cas contraire, on notera $f \not\equiv 0$, ce qui équivaut à :

Remarque. Certains auteurs se permettent d’écrire “ $f = 0$ ” au lieu de “ $f \equiv 0$ ”.



On évitera d’écrire “ $f \neq 0$ ” car il y a une ambiguïté, on peut le comprendre de deux manières :

1. Si on suit la logique des assertions $f \geq 0$, $f > 0$, $f = 0$, alors $f \neq 0$ se traduirait par : $\forall x \in D \quad f(x) \neq 0$ (f ne s’annule jamais)
2. Mais $f \neq 0$ pourrait être vu comme la négation de $f = 0$, auquel cas on traduirait par : $\exists x \in D \quad f(x) \neq 0$ (f n’est pas identiquement nulle)

1.3 Périodicité, parité

Non-officiel : soit $T > 0$. Un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ est dit “invariant par translation de T ” si :

$$\forall x \in D \quad \begin{cases} x+T \in D \\ x-T \in D \end{cases}$$

Exemple. La fonction tangente est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. L’ensemble D est invariant par translation de π .

Définition 6.7 – Fonction périodique

Soit $T > 0$. Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est dite T -périodique si D est “invariant par translation de T ” et si :

$$\forall x \in D \quad f(x+T) = f(x)$$

On dit également que T est une période de f .

Si T est une période de f alors il en va de même pour $2T, 3T$, etc.

Remarque. Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est T -périodique, alors dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le graphe de f est invariant par des translations de vecteur $T\vec{i}$ ou $-T\vec{i}$. Ainsi, la connaissance du graphe sur un intervalle de longueur T suffit à reconstruire le graphe de f sur D tout entier.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x - [x]$. Tracer le graphe de la fonction f .

On dit qu’une partie D de $\mathbb{R}$ est “symétrique par rapport à 0” si

$$\forall x \in D \quad -x \in D$$

Définition 6.8 – Fonction paire, impaire

Soit D une partie symétrique par rapport à 0 et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. f est dite paire si : $\forall x \in D \quad f(-x) = f(x)$
2. f est dite impaire si : $\forall x \in D \quad f(-x) = -f(x)$

Théorème 6.9

Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire et si $0 \in D$, alors $f(0) = 0$.

Remarque. • Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est paire, alors le graphe de f est symétrique par rapport à l’axe des ordonnées.

- Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire, alors le graphe de f est symétrique par rapport à l'origine.

Dans les deux cas, la connaissance du graphe sur $\mathbb{R}_+$ permet de déduire le graphe sur $\mathbb{R}_-$ et réciproquement.

Méthode

Quand une fonction est T -périodique ET (im)paire, il suffit d'étudier son graphe sur : par parité, on en déduit le graphe sur, et on en déduit le graphe sur $\mathbb{R}$ par T -périodicité.

Exemple. On note $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(2x)}$. On admet que $D_f = \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Sur quel ensemble est-il nécessaire d'étudier f pour tracer son graphe f ?

1.4 Opérations algébriques sur $\mathbb{R}^D$

Définition 6.10 – Opérations $+$, $-$, $\times$, etc. avec les fonctions

Soit $f, g \in \mathbb{R}^D$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit de nouvelles fonctions de $\mathbb{R}^D$ notées :

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$$

$$f - g : x \mapsto f(x) - g(x)$$

$$fg : x \mapsto f(x) \times g(x)$$

$$f^n : x \mapsto f(x)^n$$

$$\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$$

$$|f| : x \mapsto |f(x)|$$

et enfin, si g ne s'annule pas sur D , on peut définir également :

$$\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$g^{-n} : x \mapsto \frac{1}{g(x)^n}$$

Exemple. Si on note $f : x \mapsto \sin(2x)$, alors $f = 2\cos \times \sin$.

1.5 Sens de variation

Définition 6.11 – Sens de variation

Soit $f \in \mathbb{R}^D$. On dit que...

- f est croissante si : $\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- f est décroissante si : $\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$
- f est monotone si elle est croissante ou décroissante.

- f est strictement croissante si : $\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- f est strictement décroissante si : $\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
- f est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

- f est constante si : $\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) = C$
ou de manière équivalente si : $\forall x_1, x_2 \in D \quad f(x_1) = f(x_2)$

Remarque. • f est (strictement) croissante si et seulement si $-f$ est (strictement) décroissante.

- f est croissante et décroissante si et seulement si f est
- Pour montrer (par exemple) que f n'est pas croissante, on peut montrer la négation de " f est croissante" :

$$f \text{ n'est pas croissante} \iff \dots\dots\dots$$

Théorème 6.12 – Opérations et monotonie

Soit $f, g \in \mathbb{R}^D$.

1. Si f et g sont croissantes, alors $f + g$ est croissante.
2. Si $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et si f est croissante, alors λf est croissante.
3. Si $\lambda \in \mathbb{R}_-$ et si f est croissante, alors λf est décroissante.
4. Si f et g sont *positives* et croissantes, alors fg est croissante.

Démonstration. On ne montre que la dernière assertion.

□

Théorème 6.13 – Composée de fonctions monotones

Soit f et g deux fonctions monotones. Alors $g \circ f$ est monotone. Plus précisément :

- Si f et g ont la même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante.
- Si f et g sont de monotonies différentes, alors $g \circ f$ est décroissante.

Si de plus f et g sont strictement monotones, alors $g \circ f$ est strictement monotone.

Démonstration. On ne prouve que la deuxième assertion dans le cas f croissante et g décroissante (les autres cas étant similaires). Montrons ainsi que $g \circ f$ est décroissante.

□

On pourra retenir le tableau suivant :

	$g \nearrow$	$g \searrow$
$f \nearrow$	$g \circ f \nearrow$	$g \circ f \searrow$
$f \searrow$	$g \circ f \searrow$	$g \circ f \nearrow$

Remarque. Il n'est pas toujours nécessaire de dériver pour trouver un sens de variation !

Exemple. Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes sans dériver :

- $f : x \mapsto (6x + e^x)^3$ est sur $\mathbb{R}$ car ...
- $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est sur $\mathbb{R}_+$ car ...

1.6 Fonctions majorées, minorées, bornées
Définition 6.14 – Fonctions majorées, minorées, bornées

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Étant donné $M \in \mathbb{R}$, on dit que f est majorée par M si : $\forall x \in D \quad f(x) \leq M$.
2. Étant donné $m \in \mathbb{R}$, on dit que f est minorée par m si : $\forall x \in D \quad f(x) \geq m$.
3. On dit que f est majorée s'il existe un réel M tel que f est majorée par M , càd :
4. On dit que f est minorée s'il existe un réel m tel que f est minorée par m , càd :
5. On dit que f est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

On dit également que M est un majorant de f et que m est un minorant de f .

Remarque. On a :

$$\begin{aligned} & \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \leq M \\ \iff & \exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in D \quad f(x) \leq M \\ \iff & \exists M \geq 100 \quad \forall x \in D \quad f(x) \leq M \end{aligned}$$

Autrement dit “être majorée”, “être majorée par un réel positif” ou “être majoré par un réel plus grand que 100” sont toutes des propriétés équivalentes pour une fonction.

Théorème 6.15

Soit $f \in \mathbb{R}^D$.

$$f \text{ est bornée} \iff |f| \text{ est majorée} \iff$$



Les réels M , m et K ne doivent pas dépendre de x ! Souvent, on trouve ces réels a posteriori, après avoir majoré / minoré / borné $f(x)$ pour tout x dans D .

6.16



Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{3 + \cos x} - \frac{1}{x + 1}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Solution.

1.7 Maximum, minimum

Définition 6.17

Soit $f \in \mathbb{R}^D$ et $a \in D$. On dit que :

- f admet un maximum **en** a lorsque : $\forall x \in D \quad f(x) \leq f(a)$.
- f admet un minimum **en** a lorsque : $\forall x \in D \quad f(x) \geq f(a)$.
- f admet un extremum **en** a lorsque f admet un maximum ou un minimum en a .

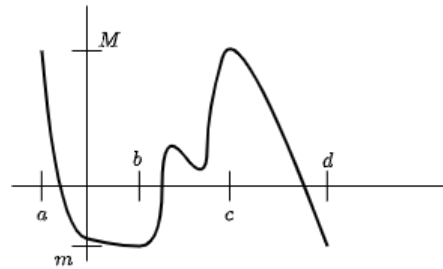
On distinguera bien :

- **Le** maximum de f , qui est la valeur maximale que prend f (et est donc unique).
- Le(s) point(s) **en lequel** f atteint ce maximum, qui ne sont pas nécessairement uniques.

Soit f la fonction représentée par la courbe ci-contre.

Le maximum de f est M , il est atteint en les points a et c .

Le minimum de f est m , il est atteint en les points b et d .



Notation. Lorsque f admet un maximum sur D , la valeur de ce maximum est notée :

$$\max_{x \in D} f(x) \quad \text{ou encore} \quad \max_D f$$

Lorsque f admet un minimum sur D , la valeur de ce minimum est notée :

$$\min_{x \in D} f(x) \quad \text{ou encore} \quad \min_D f$$

Méthode

Pour trouver un extremum, on peut faire un tableau de variation.

6.18 ★ Déterminer $\max_{x \in [1, +\infty[} \frac{\ln x}{x}$.

Solution.

1.8 Restriction d'une fonction

Définition 6.19

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $A \subset D$. La restriction de f à A est la fonction notée $f|_A$ définie par :

$$\begin{aligned} f|_A : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

La restriction consiste donc à rétrécir l'ensemble de départ à un sous-ensemble A de D .

Définition 6.20

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $A \subset D$. On dit que f vérifie une “propriété” $\mathfrak{P}$ sur A si la fonction $f|_A$ vérifie la propriété $\mathfrak{P}$.

Exemple.

- La fonction $f : x \mapsto x^3$ est positive sur $\mathbb{R}_+$ (car $f|_{\mathbb{R}_+}$ l'est) et négative sur $\mathbb{R}_-$ (car $f|_{\mathbb{R}_-}$ l'est).
- La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. *Elle n'est cependant pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$!*

Remarque. Par convention, on exclut de la définition précédente la continuité et la dérivabilité : on donnera un autre sens à “ f est continue sur $\mathbb{R}_+$ ” ou “ f est dérivable sur $[-1, 1]$ ”.

2 Notions intuitives de continuité et de dérivation

Hypothèse

Dans toute la suite, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ non triviaux (i.e. non vides et non singletons).

2.1 Limites

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Intuitivement, étant donné $x \in I$, on peut s'intéresser à l'éventuelle limite de $f(x)$ quand x tend vers a . Deux cas sont possibles :

1. $f(x)$ ne tend pas vers une unique valeur. Dans ce cas on dit que la limite n'existe pas et il est faux d'écrire : " $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ". Par exemple, on ne peut pas écrire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ ou $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$.
2. $f(x)$ tend vers une valeur unique, finie ou infinie. Dans ce cas on dit que la limite existe. On peut alors écrire $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots$

Exemple. La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'admet pas de limite en 0 : en effet

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lfloor x \rfloor = \dots \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \lfloor x \rfloor = \dots$$

2.2 Continuité

Définition 6.21 – Continuité ponctuelle

Soit f une fonction et $a \in D_f$. On dit que f est continue en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Sinon, on dit que f est discontinue en a .

Notation. Une limite peut également s'écrire : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.

Remarque. Dans les deux notations, la variable x est **muette**.

Exemple. On note $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$. f est continue en tout point a de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, mais f est discontinue en tout point a de $\mathbb{Z}$ car $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = a - 1$ et $f(a) = a$.

Définition 6.22 – Continuité globale

Soit f une fonction et $A \subset D_f$. On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A .

Notation. On notera $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 6.23

On dit que f est une fonction rationnelle si f est de la forme $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec P et Q deux fonctions polynômes, et $Q \not\equiv 0$. Dans ce cas, $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$.

- Exemple.**
- Toute fonction polynôme est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
 - Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.
 - Les fonctions usuelles suivantes sont continues sur leur ensemble de définition :

$$\exp, \ln, x \mapsto |x|, x \mapsto \sqrt[n]{x} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\cos, \sin, \tan, \operatorname{ch}, \operatorname{sh}, \operatorname{th}, \arccos, \arcsin, \arctan$$

(les fonctions ch , sh , th , $\arccos$, $\arcsin$, $\arctan$ seront vues plus loin)

Théorème 6.24 – Opérations sur les fonctions continues

Soit $a \in D$. Soit f et g deux fonctions.

- Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, les fonctions $\lambda f + \mu g$ et $f \times g$ sont continues sur D , ainsi que $\frac{f}{g}$ si g ne s'annule pas sur D .
- **Composition :**

$$\begin{cases} f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R}) \\ g \in \mathcal{C}(D', \mathbb{R}) \\ \forall x \in D \quad f(x) \in D' \end{cases} \implies g \circ f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$$

En particulier, si f et g sont continues sur leur ensemble de définition, alors $\lambda f + \mu g$, fg , $\frac{f}{g}$ et $g \circ f$ aussi.

- Exemple.**
- La fonction $f : x \mapsto e^{\sqrt{x}} + \frac{x^4}{\cos x}$ est continue sur D_f , “*par opérations sur les fonctions continues*”.
 - On ne peut utiliser l’argument “*par opérations (...)*” pour affirmer que la fonction $f : x \mapsto (x - \lfloor x \rfloor)^2 + x$ est continue sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n’est pas continue sur $\mathbb{R}$. Voici comment on peut le prouver :



“ f est continue sur A ” ne signifie pas la même chose que $f|_A$ est continue ! Par exemple, en posant $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ alors :

- La fonction f est-elle continue sur $[0, 1[$?
- La fonction $f|_{[0, 1[}$ est-elle continue ?

Pourquoi cette distinction ? La continuité est une propriété **locale** : pour affirmer que f est continue en un point $a \in A$, il faut connaître le comportement de f dans un petit intervalle autour de a . Dans l'exemple ci-dessus, on a $A = [0, 1[$ et $a = 0$: le point a se trouve au bord de A , et il ne suffit pas de connaître f sur A (i.e. de connaître $f|_A$) pour assurer que f est continue en a .

2.3 Dérivation, fonction dérivée

Définition 6.25 – Dérivabilité ponctuelle

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a lorsque, étant donné $x \in I \setminus \{a\}$:

Dans ce cas, on note : $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et on appelle $f'(a)$ le nombre dérivé de f en a .

L'expression $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est appelé le taux d'accroissement de f en a .

Remarque. En posant $h = x - a$ (donc $x = a + h$), on peut dire que f est dérivable en a si et seulement si

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{admet une limite **finie** quand } h \text{ tend vers } 0$$

et cette limite sera $f'(a)$.

Méthode

Pour calculer la limite d'une expression, on peut la réécrire en un taux d'accroissement, ce qui permet de la calculer s'il s'agit d'une fonction dérivable.

6.26 ★ Calculer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$.

Solution.

Définition 6.27 – **Dérivabilité globale**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $J \subset I$. On dit que f est dérivable sur J lorsque f est dérivable en tout point de J .

Dans ce cours, on notera $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. *Ce n'est pas une notation officielle !*

Définition 6.28

Soit f une fonction. On appelle ensemble de dérivabilité l'ensemble des points en lequel f est dérivable.

Dans ce cours, on notera D'_f l'ensemble de dérivabilité de f . *Ce n'est pas une notation officielle !*

Définition 6.29 – **Fonction dérivée**

On appelle fonction dérivée de f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f' : D'_f &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$



L'ensemble D'_f **ne s'obtient pas** en calculant $f'(x)$ puis en regardant l'ensemble des valeurs x pour lesquelles $f'(x)$ a un sens ! C'est le contraire : le calcul de $f'(x)$ n'est possible que pour un point x en lequel on a prouvé que f est dérivable, i.e. $x \in D'_f$. Voir aussi la méthode puis l'exemple en section suivante.

2.4 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème 6.30 – **Opérations sur les fonctions dérivables**

Soit $a \in I$. Soit f et g deux fonctions.

- Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, les fonctions $\lambda f + \mu g$ et $f \times g$ sont dérivables sur I , ainsi que $\frac{f}{g}$ si g ne s'annule pas sur I .

- **Composition :**
$$\begin{cases} f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \\ g \in \mathcal{D}(J, \mathbb{R}) \\ \forall x \in I \quad f(x) \in J \end{cases} \implies g \circ f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \quad .$$

En particulier, si f et g sont dérivables sur leur ensemble de définition, alors $\lambda f + \mu g$, fg , $\frac{f}{g}$ et $g \circ f$ aussi.

Remarque. On dispose des formules de dérivations données dans le formulaire (aussi accessible en ligne).

Exemple. • Soit $f : x \mapsto \ln \left(\cos \left(e^{\frac{x+1}{x-3}} \right) \right)$. Alors f est dérivable sur D_f “*par opérations sur les fonctions dérivables*”.

- On ne peut utiliser l'argument “*par opérations (...)*” pour affirmer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Voici comment on peut le prouver :

Méthode

Pour dériver une fonction f , on détermine D'_f **puis** on calcule $f'(x)$:

1. On applique le Théorème 6.30 sur chaque intervalle I sur lequel toutes les fonctions présentes dans l'expression $f(x)$ sont dérivables : “*Par opérations sur les fonctions dérivables*”, f est dérivable sur I .
 - Ensuite, pour tout $x \in I$, on calcule $f'(x)$ avec les formules usuelles.
2. Pour chaque point a de D_f qui n'a pas encore été traité, on vérifie directement si f est dérivable en a par le taux d'accroissement.

6.31 ★★ On pose $f : x \mapsto \ln(2-x)\sqrt{1-x^2}$. Déterminer la dérivée de f .

Solution.



Ne jamais écrire “ $\left(\frac{x^3}{x+1}\right)'$ ” ou “ $f(x)'$ ” : on dérive toujours une *fonction* comme f , jamais une *expression* comme $f(x)$. De telles notations sont à proscrire de la copie. En revanche, elles peuvent servir au brouillon.

Théorème 6.32

Soit $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est dérivable en a (resp. sur I), alors f est continue en a (resp. sur I).

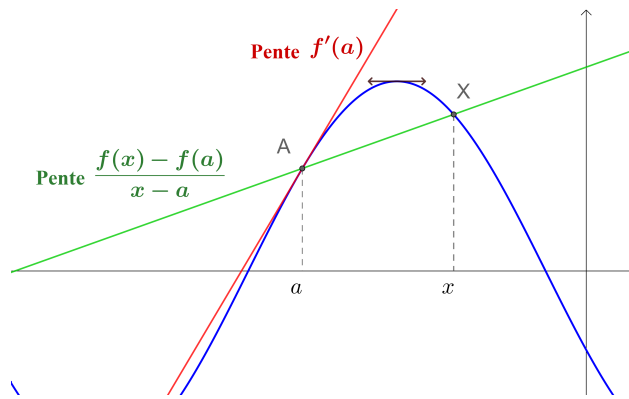
2.5 Dérivée et tangente à $\mathcal{C}_f$

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est la pente de la droite qui relie les points $(a, f(a))$ à $(x, f(x))$. Quand x tend vers a , si f est dérivable en a , cette pente tend vers $f'(a)$ qui correspond à la pente de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point a .

Théorème 6.33

Soit $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en a . La courbe représentative de f admet au point de coordonnées $(a, f(a))$ une tangente (non verticale) d'équation :

$$T : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



En particulier, si $f'(a) = 0$, alors la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = a$ est horizontale. On le représente sur la courbe par une double flèche $\leftrightarrow$ comme ci-dessus (ou, si a est un bord de I , une demi-flèche $\rightarrow$ ou $\leftarrow$).

2.6 Dérivée et sens de variation

Théorème 6.34 – Dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I .

- f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I .
- f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I .
- f est constante sur I si et seulement si $f' \equiv 0$ sur I .
- Si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur I , alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I .



Il est indispensable que I soit un **intervalle** : la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $f' < 0$ en tout point de $\mathbb{R}^*$, mais f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$! En effet, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle mais une réunion de deux intervalles : $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Remarque. La dernière assertion du Théorème 6.34 n'est qu'une simple implication. La réciproque de cette implication est fausse : par exemple $f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée n'est pas strictement positive : elle s'annule en 0.

2.7 Étude de fonction

Méthode – Étudier une fonction f

1. Déterminer l'**ensemble de définition** D_f .
2. Étudier la **périodicité** et la **parité**, pour restreindre le domaine d'étude à un ensemble $D \subset D_f$.
3. Dresser le **tableau de variations** de f sur D , avec éventuellement un calcul de f' . Préciser dans le tableau les valeurs particulières de f et ses limites aux bords de D .
4. (Optionnel) Calculer quelques valeurs particulières, équations de tangente, asymptotes.
5. **Tracé de la courbe** pour $x \in D$, puis pour $x \in D_f$.

6.35



Étudier la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\tan x}$.

Solution.

3 Compléments

3.1 Asymptotes

Définition 6.36 – Asymptote

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

on dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$ en $+\infty$.

- S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$$

on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$.

On adapte naturellement la définition ci-dessus pour une asymptote horizontale en $-\infty$.

Exemple. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ admet $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$, ainsi que l'asymptote $x = 1$ comme asymptote verticale.

3.2 Fonction à valeurs complexes

Dans cette section on considère des fonctions *complexes à variable réelle*, c'est-à-dire des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Définition 6.37

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On définit

$$\operatorname{Re} f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \operatorname{Re}(f(x))$$

$$\operatorname{Im} f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \operatorname{Im}(f(x))$$

Définition 6.38

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est dérivable lorsque $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont. On définit alors la fonction dérivée de f comme étant :

$$f' = (\operatorname{Re} f)' + i (\operatorname{Im} f)'$$

Théorème 6.39 – Dérivation dans $\mathbb{C}^D$

Soit $u, v : I \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables sur I . Les résultats des Théorèmes 6.24 et 6.30 sont encore vrais dans ce cadre (avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$).

Remarque. Les formules de dérivations sont identiques : i est traité comme une constante quelconque.

Exemple. Dériver la fonction $f(x) = (1 + ix)^6 + e^{ix^2}$.

3.3 Transformations et symétries du graphe

Théorème 6.40 – Effet sur le graphe d'opérations simples

Connaissant la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on peut obtenir celle des fonctions suivantes, avec $b \in \mathbb{R}$ et $a > 0$:

$$x \mapsto f(x) + b$$

$$x \mapsto f(x + b)$$

$$x \mapsto f(-x)$$

$$x \mapsto -f(x)$$

$$x \mapsto f(ax)$$

$$x \mapsto af(x)$$

Plus précisément :

- La courbe de $x \mapsto f(x) + b$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ par une translation de vecteur $b\vec{j}$.
- La courbe de $x \mapsto f(x - b)$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ par une translation de vecteur $b\vec{i}$.
- La courbe de $x \mapsto -f(x)$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ par symétrie selon l'axe des ordonnées.
- La courbe de $x \mapsto f(-x)$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ par symétrie selon l'axe des abscisses.
- La courbe de $x \mapsto af(x)$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ par “compression” vers l'axe des abscisses si $0 < a < 1$ et par “dilatation” si $a > 1$.
- La courbe de $x \mapsto f(ax)$ s'obtient à partir de $\mathcal{C}_f$ par “compression” vers l'axe des ordonnées si $0 < a < 1$ et par “dilatation” si $a > 1$.

Comprendre ce genre de transformations est très utile en Physique et en SI, notamment avec des fonctions du type $f(x) = A \cos(\omega x - \varphi)$. Comprendre ces transformations sur cette fonction f est un bon moyen de retenir le cas général. Voir aussi le script suivant :

<https://www.desmos.com/calculator/ybhgn1qoye?lang=fr>

4 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour montrer une inégalité du type $f(x) \leq g(x)$, on peut étudier la fonction $x \mapsto g(x) - f(x)$ et montrer qu'elle est positive par un tableau de variations.

Méthode

Pour dériver une fonction f , on détermine D'_f **puis** on calcule $f'(x)$:

1. Pour chaque intervalle I sur lequel toutes les fonctions présentes dans l'expression $f(x)$ sont dérivables : "*Par opérations sur les fonctions dérivables*", f est dérivable sur I .
 - Ensuite, pour tout $x \in I$, on calcule $f'(x)$ avec les formules usuelles.
2. Pour chaque point a de D_f qui n'a pas encore été traité, on vérifie directement si f est dérivable en a par le taux d'accroissement.

Méthode

Pour calculer la limite d'une expression, on peut la réécrire en un taux d'accroissement, ce qui permet de la calculer s'il s'agit d'une fonction dérivable.

Méthode – Étudier une fonction f

1. Déterminer l'**ensemble de définition** D_f .
2. Étudier la **périodicité** et la **parité**, pour restreindre le domaine d'étude à un ensemble $D \subset D_f$.
3. Dresser le **tableau de variations** de f sur D , avec éventuellement un calcul de f' . Préciser dans le tableau les valeurs particulières de f et ses limites aux bords de D .
4. (Optionnel) Calculer quelques valeurs particulières, équations de tangente, asymptotes.
5. **Tracé de la courbe** pour $x \in D$, puis pour $x \in D_f$.